אלגברה ליניארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

תוכן העניינים

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 1 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

1) $T(x,y)=(x+y,x-y)\ ;\quad T:R^2\to R^2$

2) $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

3) $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\ ;\quad T:R^3\to R^2$

4) $T(x,y)=(xy,y,z)\ ;\quad T:R^2\to R^3$

5) $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

6) $\left(B\in M_n[R]\right)\quad T(A)=BA+AB\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

7) $T(A)=A+A^T\ ;\qquad T:M_n[R]\to M_n[R]$

8) $T(A)=|A|\cdot I\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

9) $T(A)=A\cdot A^T\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

10) $T(A)=A^{-1}\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

11) $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\ ;\quad T:P_3[R]\to P_2[R]$

12) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

13) $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

14) $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

15) $\left(F=C,F=R\right)\quad T\left(z\right)=\overline{z}\ ;\quad T:C[F]\to C[F]$

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:
$T:R^2 \to R^2$; $T(x,y)=\left(m^2x^{2m}, y^{2m}+x\right)$?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

18) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

19) $T:R^4 \to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T\left(1\right)=4, T\left(4x+x^2\right)=x, T\left(1-x\right)=x^2+1$.

21) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$, המקיימת:
$$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$$
$$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$$
$$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n \to R^m$.

22) נתונה העתקה ליניארית $T:V \to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת״ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת״ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת״ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת״ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** לא
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן
21) שאלת הוכחה.		**22)** שאלת הוכחה.		

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,T:R^3\to R^4$

3) $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\ \ T:R^4\to R^3$

4) $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\ \ ,\ \ T:M_2[R]\to M_2[R]$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\ \ ,\ \ T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)\ \ ,\ \ D:P_3[R]\to P_3[R]$

7) מצאו העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצאו העתקה ליניארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T:V\to U$.

9) הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

10) הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה ליניארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קיימת העתקה ליניארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

11) ידוע שהעתקה ליניארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim(W)=4$, $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה ליניארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$.

ב. לכל העתקה ליניארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$, $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq\operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}(T)=(\operatorname{Ker}(S))^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \quad p(x)=x, \quad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) שאלת הוכחה.

10) לא.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא <u>חח״ע</u>,[1] האם היא <u>על</u>,
האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

6) נתונה העתקה ליניארית $T:U\to V$.
הוכיחו:
א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז T לא על.
ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז T לא חח״ע.
ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז T חח״ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה T חח״ע.

[1] הערה: העתקה חח״ע נקראת גם לא-סינגולרית.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך :
א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח״ע.
ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת״ל.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת״ל ב- V.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם T חח״ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W.
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W, אז T חח״ע.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.
ב. אם $m>n$, אז T חח״ע.
ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Ker}(T)$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ב. אם T חח״ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $v\in\operatorname{Ker}(T)$, אז $v\in\operatorname{rowsp}(A)$.
ב. אם $v\in\operatorname{rowsp}(A)$, אז $v\in\operatorname{Ker}(T)$.
ג. אם $v\in\operatorname{colsp}(A)$, אז $v\in\operatorname{Im}(T)$.
ד. אם $\operatorname{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

13) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה A,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:
א. אם $\operatorname{rank}(A)=n$, אז T חח"ע.
ב. אם $\operatorname{rank}(A)=n$, אז T על.
ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\operatorname{Im}(T)\subseteq\operatorname{Ker}(T)$.
ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\operatorname{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.
א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

15) נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.
א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T.

תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $$\begin{gathered}\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n \\ \operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1\end{gathered}$$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Im}(T)=M_n[R]$, $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 2 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$$B_1 = \{ (1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1) \}\ ,\quad B_2 = \{ (1,0,1), (0,1,1),\ (0,0,1) \}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
נתונים שני בסיסים של R^3:
$B_1=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$, $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.
סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.
סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:
1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$
2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$
3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?
ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.
ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

3) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,
היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.
מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור ליניארי על R^3.
נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$.
חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}A$,

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\{1,1-x,x+x^2\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$.

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T\left(p(x)\right)$.
* פתרו בשתי דרכים שונות.
ב. מצאו את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T\left(v\right)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{rank}\left(A\right)=n$.
הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,

היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה ליניארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.

הוכיחו ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הליניארית

$T:V\to V$; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\operatorname{Im}(T),\operatorname{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות ליניאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- V.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$, $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכיחו כי: $\operatorname{Ker}(S)=\{0\}$, $\operatorname{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את V.

ד. קבעו האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את V.

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. שאלת הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד; הו"ע שלו: $(1,-1,1)$. ז. לא.

3) $T(x,y,z)=(x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

5) $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$ 6) $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(p(x))=p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) שאלת הוכחה.

11) א. $\operatorname{Ker}(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$, $\operatorname{Im}(T)=sp\{1+x^2,x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $\operatorname{Ker}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\operatorname{tr}(T)=15$, $\det(T)=0$, $\operatorname{rank}(T)=2$

13) שאלת הוכחה.

14) א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\operatorname{Im}(T)}=\{1\}$, $\dim(\operatorname{Im}(T))=1$

$B_{\operatorname{Ker}(T)}=\{1,x^2\}$, $\dim(\operatorname{Ker}(T))=2$

15) שאלת הוכחה.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T:R^2 \to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4 \to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2.

3) תהי $T:R^3 \to R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3, לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2.
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר: $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצאו את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.
מצאו את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה T, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצאו את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V)=n$,
ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכיחו או הפריכו:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\left(a+b,b+c,c\right)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשבו את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשבו את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$S:R^2\to R^3$; $S(x,y)=(x-y,x+y,y)$

$T:P_2[R]\to R^2$; $T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix}25 & 0 & -6\\ -20 & 0 & 5\end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) שאלת הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

1) נתונה העתקה ליניארית, $T:M_2[R]\to M_2[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W.
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה ליניארית, $T:M_{10}[R]\to M_{10}[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה –
המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

3) מצאו העתקה ליניארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה ליניארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה ליניארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x,y,z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T:M_2[R]\to M_2[R]$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי ממימד n.
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.
א. הוכיחו ש- T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.
ב. הוכיחו כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1}?

תשובות סופיות

1) א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \middle| \lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

2) $|P|=4^{10}$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R)$ $T(X)=4X$

4) א. $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$, $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$, $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$, ניתנת לליכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$, וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$, $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z, y, 2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

ב. $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת לליכסון.

8) שאלת הוכחה.

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 3 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009}.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.

במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.

כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.

פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

7) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A .

13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 0,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון.   ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0),\ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

13) אין כזו מטריצה.

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה מטריצה ריבועית A.
הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכיחו ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכיחו ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-
$p(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)x+|A|$.

2. נתון כי $\mathrm{tr}(A)=4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכיחו כי $a_0=(-1)^n|A|$, $a_{n-1}=-\mathrm{tr}(A)$.

4) נתונה מטריצה A מסדר n.
הוכיחו:
א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow rank(A-\lambda I)<n$.
ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל- $n-rank(A-\lambda I)$.
ג. אם $rank(A)=k<n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n-k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.

5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $rank(B)=1$.
הוכיחו:
א. 0 ע"ע של המטריצה B.
ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.
ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.
ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.
ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $tr(B)$.

6) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda=k\neq 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

7) תהיינה A ו-B מטריצות מסדר n המקיימות $AB=BA$.
נניח כי $rankA=n-1$ ו- v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0<rank(A-10I)<rank(A-4I)<3$.
א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A.
ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.
ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.
ד. קבעו האם A הפיכה?
ה. הוכיחו כי $(A-10I)^2(A-4I)=0$. האם ייתכן ש- $A=4I$ או $A=10I$?

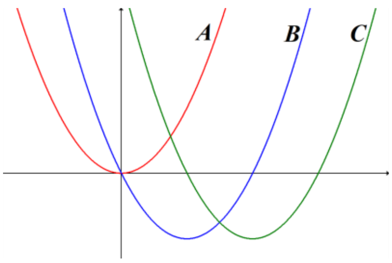
9) תהי A מטריצה מסדר 5×5, כך ש- $\det A=12$ וגם $\rho(I+A)=\rho(2I-A)=3$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

10) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הניחו $n>1$).

11) תהי A מטריצה מסדר 3×3, כך ש- $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I+A)<\rho(4I-A)$.
הוכיחו ש- A לכסינה.

12) תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I-A)>\rho(5I+A)$.
ידוע גם ש- $span\{(3,1,-1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=2\underline{x}$.
הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A.

13) באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A, B ו- C מסדר 2.
ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון.
מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.



14) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

15) יהיו $A,B\in M_2[\mathbb{R}]$.
ידוע כי $A=AB-BA$.
הוכיחו כי $A^2=0$.

16) תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $tr(A)\neq-1$.
א. הוכיחו כי $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{1+tr(A)}A$.
ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

ב. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

הערה:
הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

א. אם $tr(A) = 3,\ tr(A^2) = 5$. מצאו את $|A|$.

ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A) = 5$ מצאו את $tr(A^2)$.

ג. אם $|A| = 5$ ואם ל-A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A| = 1$.

א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A.

ב. ידוע כי $A^{100} = aA^2 + bA + cI$.
מצאו את a, b, c.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t) = (t-2)^2 (t+1)^2 (t-5)^8 (t+3)^7$.

א. מה הדרגה של A?

ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש-$AP = PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A - 5I$.

22) תהי $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את הע"ע של A על ידי α ו- β.
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha=\beta$, והוכיחו ש- $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה $p(t)=t^4+2it^3+3t^2$.

הוכיחו שהמטריצה A^2-3A+I לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t)=t^3-2t+5$.
הוכיחו שלכל $b\in R^3$ יש למערכת $A\mathbf{x}=b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $tr(A)$.

ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A\neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t)=(t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\operatorname{tr}(A-2I)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו ש- λ ע"ע של A אם ורק אם $A-\lambda I$ לא הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+2)^{n-1}$, כאשר $n\geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C=A^2+A-2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D=A^2-2I$ הפיכה.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.

ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.

ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.

ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n=0$.

ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n, ותהי $B=A-I$.
מצאו את $|B|$.

27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים.
בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

28) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.
חשבו את $|A|$.

29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים.
א. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו-B, מסדר n. הוכיחו או הפריכו:
א. ל-AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.
ב. נניח ש-v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו-B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3. ידוע כי v_1,v_2 הם ו"ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda=1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda=-1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת"ל, אז $A^{2018}=I$.
ב. A ניתנת ללכסון.
ג. v_3 הוא צרוף ליניארי של הווקטורים v_1,v_2.

33) הוכיחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

34) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו"ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

36) תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.

ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.

ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.

ה. הוכיחו כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u \mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש- $\dim W_\alpha \ge 1$.

ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש:

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\le 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

41) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכיחו כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A.
הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.

נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.

צריך להוכיח: $A^2 = I$.

45) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1.
הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ- 0.

ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n.
הוכיחו ש- 0 ע״ע של A, ושהוא הע״ע היחיד שלה.

46) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו ש- A לכסינה.

ב. האם המטריצה $B = 4A^{111} - 10A + 20I$ הפיכה?

47) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2 + I = 0$.
הוכיחו את הטענות בסעיפים א׳-ד׳:

א. A הפיכה.

ב. A לא ניתנת לליכסון.

ג. A לא סימטרית.

ד. n זוגי.

ה. האם הטענה בסעיף ד׳ נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.
ידוע ש- λ ע״ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v.

א. הוכיחו כי $\lambda + c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A + cI$ עם וקטור עצמי v.

ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע״ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע״ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.

ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע״ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע״ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.

49) נתונה מטריצה A על ידי $a_{ij}=\begin{cases} b & i=j \\ a & i\neq j \end{cases}$ כאשר $1\le i,j\le n$.
חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A.
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n.
הוכיחו:
א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.
ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A.

51) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו:
א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או 1- אז $A^2=I$.
ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I-A|>0$.

52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

53) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.
ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=1$ $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0=a_1=2,\ a_2=4$ $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

1) שאלת הוכחה.
2) א. הערך העצמי הוא 260.
3) א.2. $|A|=4$
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) $D=diag(0,0,k)$
7) שאלת הוכחה.
8) א. $p(\lambda)=(\lambda-10)^2(\lambda-4)$
ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.
ג. $D=diag(10,10,4)$ ד. כן. ה. לא.
9) $\mathrm{diag}(-1,-1,2,2,3)$
10) 0 ו-$tr(A)$.
11) שאלת הוכחה.
12) $diag(2,-5,-5),\ diag(-5,2,-5),\ diag(-5,-5,2)$
13) $rank(A)=0,\ rank(B)=1,\ rank(C)=2$
14) $0,1,-1$
15) שאלת הוכחה.
16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
17) שאלת הוכחה.
18) א. $|A|=2$ ב. $tr(A^2)=25$ ג. $tr(A)=6$
19) א. $1,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ב. $a=0,\ b=1,\ c=0$
20) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$
21) א. 19 ב. 11
22) שאלת הוכחה.
23) $\mathrm{diag}(1,1,-3i,-8+9i)$
24) א. $|A|=-5$ ו-$tr(A)=0$ ב. $\mathrm{tr}(A-2I)=-3$
25) שאלת הוכחה.
26) ה. $|B|=(-1)^n$
27) $|A|=-384$

28) $m_M(x)=(x-2)^2(x-7)$

29) א. $p_M(x)=(x-5)^2(x-6)(x-7)$

30) שאלת הוכחה.

31) ב. $4+k$

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

36) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

37) ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

41) שאלת הוכחה.

42) שאלת הוכחה.

43) שאלת הוכחה.

44) שאלת הוכחה.

45) שאלת הוכחה.

46) שאלת הוכחה.

47) שאלת הוכחה.

48) שאלת הוכחה.

49) $|A|=(b-a)^{n-1}\left[a(n-1)+b\right]$

50) שאלת הוכחה.

51) שאלת הוכחה.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) $a_n=2^{n+1}-3^n$

55) $a_n=\frac{1}{3}\left(3+(-1)^n+2^{n+1}\right)$

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&0&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

2) נתון $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, כאשר $m\in\mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m, המטריצה A לכסינה?

כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

5) נתון $A=\begin{pmatrix}k-2&2k&k+1\\k-1&-1&2\\-k&0&-6\end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

עבור ערך ה-k שמצאת בסעיף א:

ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.

ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

6) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- **בלבד**.

ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

7) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל הערכים של a, עבורם A לכסינה.

ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל-A.

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. עבור כל ערך של a, מצאו את הערכים העצמיים של A.

ב. עבור אילו ערכי a, המטריצה A לכסינה?
בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

9) נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$,

כאשר a,b,c מספרים ממשיים המקיימים $a-b+c=-1$.

א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.

ב. נתון כי $a=b>1$.
הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

ג. ידוע כי $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+a<0$.
הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a,b, כך שהמטריצה
$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ לכסינה.

11) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי a,b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש-A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש-A דומה לה.

12) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

מצאו את כל הערכים של a ו-b, כך ש-A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

13) נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, כאשר a פרמטר ממשי.

ידוע ש-$\lambda=-2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a?

ב. האם המטריצה לכסינה?

14) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.

האם קיימים ערכי a, כך ש-A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל-A.

15) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ a & -a & a \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{R}$.

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

תשובות סופיות

1) א. $k \neq 4$ ב. $D = diag(4, k, k)$

2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k.

3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$. ב. $D = diag\left(1, -a^2, a^2\right)$

4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = diag(m-1, m-1, m+2)$

5) א. $k = 3$ ב. ר״א = 1. ר״ג = 1. ג. $D = diag(2, -3, -5)$

6) א. $a = 1,\ b = 0$ או $a = 3,\ b = -4$ ב. המטריצה לא לכסינה.

7) א. A לכסינה עבור כל a. ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(a, 1, 2)$.

8) א. אם $a \neq 0, 2, -1$, אז יש שלושה ע״ע שונים $a^2, 2a, a+2$.
אם $a = 0$, הע״ע הם 0 ו- 2.
אם $a = -1$, הע״ע הם 1 ו- -2.
אם $a = 2$, יש ע״ע אחד והוא 4.
ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2, -1$.
במקרה זה היא דומה למטריצה $D = diag\left(a^2, 2a, a+2\right)$.

9) שאלת הוכחה.

10) אם $a = b = 0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b = 0$, אז A לכסינה.

11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:
כאשר $a \neq 0, 1$ ואז דומה ל- $D = diag(1, 0, a)$
או כאשר $a = 0$ וגם $b = 0$ ואז דומה ל- $D = diag(0, 0, 1)$
או כאשר $a = 1$ וגם $b = -\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = diag(0, 1, 1)$

12) A לכסינה אם ורק אם:
1. $b \neq 2, 3$ ואז $D = diag(3, 2, 2, b)$.
או 2. $b = 2$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3, 2, 2, 2)$.
או 3. $b = 3$ וגם $a = 0$ ואז $D = diag(3, 3, 2, 2)$.

13) א. $a = 3$ ב. כן.

14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a = 0$ ודומה ל- $D = diag(0, 0, 0, 0)$.
מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = diag(a, -a, ai, -ai)$.

15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a = 0$. ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a.

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכיחו כי:
א. $|A|=|B|$
ב. $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$
ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.
ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&7&0\\9&-17&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\-1&3&2\\2&-8&-5\end{pmatrix}$.
האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C. הוכיחו כי:
א. A דומה לעצמה.
ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.
ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.
ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.
ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.
ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.
ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.
ח. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.
ט. אם A דומה ל-B, אז $\operatorname{Nullity}(A)=\operatorname{Nullity}(B)$.

הערה – $\operatorname{Nullity}(A)=$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכיחו או הפריכו:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim\operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^TA|$

ה. ע"ע עבור A^TA.

ו. ע"ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

9) ענו על הסעיפים הבאים:

א. A ו-B שתי מטריצות הדומות למטריצה C.
הוכיחו כי A דומה ל-B.

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-2&1&1\\2&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&0\\-1&x&2\end{pmatrix}$$

11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

12) נתונות שתי מטריצות $A,B\in M_n[\mathbb{R}]$.
נתון כי A ניתנת ללכסון.
הוכיחו:
B דומה ל-A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A.

13) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.
עבור אילו ערכים של a ו-b המטריצות A ו-B דומות?

14) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$.
קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=B$.

15) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&2&\dots&0&0\\0&0&\dots&n-1&0\\0&0&\dots&0&n\end{pmatrix}$ ו-$B=\begin{pmatrix}n&0&\dots&0&0\\0&n-1&\dots&0&0\\0&0&\dots&2&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$.
קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש-
$P^{-1}AP=B$.

16) תהיינה A,B מטריצות ב-$M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=k$, כאשר k מספר ממשי שונה מ-0.
א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו-B.
ב. הוכיחו ש-A ו-B דומות.

17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t)=(t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I+A)=1$.

א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2.

ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4-10A+9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $\left(A^4-10A+9I\right)\underline{x}=\underline{0}$.

18) נתון כי $A,B,C,D\in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש-A דומה ל-B ו-C דומה ל-D.

הוכיחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל-$B+D$.

ב. AC דומה ל-BD.

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: אם A דומה ל-B אז $A-kI$ דומה ל- $B-kI$.

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&0\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix}$$

21) נתון כי A ו-B מטריצות דומות.

הוכיחו של-A ו-B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7, בעלת דרגה 4.

נתון שהפולינום $q(t)=t^4-7t^2+10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A.

מצאו את הפולינום האופייני של A.

א. הוכיחו ש-A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $tr\left(A^2\right)$.

23) נתונות שתי מטריצות $A,B \in M_n(R)$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2.
ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) לא.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, 1/15, 1/37$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $x=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) $b=-2$ ו- $a=0$
14) כן, עבור $a=\pm 2$
15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.
16) א. $p_A(t)=p_B(t)=t^n-kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.
17) א. $p(x)=(x-1)(x-16)^2$. ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.
21) שאלת הוכחה.
22) א. $D=diag\left(0,0,0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ ב. $tr\left(A^2\right)=14$
23) שאלת הוכחה.

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 4 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

שדות – שדה השאריות מודולו p

1) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.

ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.

ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.

ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

3) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

4) פתרו את המערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+x_3=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

5) פתרו את המערכת $\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

6) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

7) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

חשבו את A^{-1}.

9) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_3$.

חשבו את A^{-1}.

10) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, המטריצה הפיכה.

11) נתונה הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\{(k,1,1,1,1),(1,k,1,1,1),(1,1,k,1,1),(1,1,1,k,1),(1,1,1,1,k),\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

12) במרחב $(Z_5)^4$, מעל השדה Z_5, נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W:

$$U=\{(x,y,z,t)\,|\,3x+4y+z+t=0,\ \ 2x+y+2t=0\}$$

$$W=sp\{(2,3,0,4),\ (1,1,4,1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים $U,W\ \ U+W,\ U\cap W$.

מה מספר האיברים בכל מרחב?

13) הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T:M_2[\mathbb{Z}_5]\rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$,
המקיימת את התנאים הבאים:
1. $\{0\}\neq \mathrm{Ker}(T)\subset \mathrm{Im}(T)$
2. $\mathrm{Ker}(T)\neq \mathrm{Im}(T)$
3. $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[\mathbb{Z}_5]\rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$,
המוגדרת על ידי $T\left(p(x)\right)=\left(x+\overline{3}\right)p(x)+p\left(\overline{0}\right)\left(x^3+\overline{2}\right)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T,
מהבסיס $E_1=\left\{\overline{1},x,x^2\right\}$ לבסיס $E_2=\left\{\overline{1},x,x^2,x^3\right\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(T)$.
כמה איברים יש ב- $\mathrm{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Ker}(T)$.
כמה איברים יש ב- $\mathrm{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

1) א. $(1,-1)$ ב. $(1,6)$ ג. $(2,1),\ (4,0),\ (0,2),\ (3,3)$ ד. $(1,2)$

2) $(0,3,0)$

3) $(1,2,1)$

4) $(0,3,0)$

5) $(1,-3,2,2)$

6) פתרון יחיד: $k=0,\ \ k=2$, 9 פתרונות: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7) פתרון יחיד: $k=0,\ \ k=2,\ \ k=4$, 5 פתרונות: $k=3$, אין פתרון: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות.

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$

10) $k=0,\ \ k=2,\ \ k=4$

11) עבור $k=1,\ \ k=3$, הווקטורים תלויים ליניארית,
ועבור $k=0,\ \ k=2,\ \ k=4,\ \ k=5,\ \ k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

12) $B_U=\{(4,0,2,1),\ (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_W=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_{U+W}=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2),\ (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.

$B_{U\cap W}=\{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.

13) ההעתקה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

14) א. $[T]=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&0\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $\dim \operatorname{Im}T=2$, $B_{\operatorname{Im}T}=\{x+x^3,x^2+2x^3\}$, 25;

ג. $\dim KerT=1$, $B_{KerT}=\{9-3x+x^2\}$, 5.

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 5 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.
בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3),\ v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,
נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.
הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.
מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.
בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות $f,\ g$ ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.
בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3, שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.
7) $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו :

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $\mathrm{d}(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times 3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times 3}[R]$,

חשבו :

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $\mathrm{d}(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ \ q(x)=3x+1,\ \ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשבו :

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $\mathrm{d}(p,q)$ ו. $\hat{r}$

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\ldots,u_n),\ v=(v_1,\ldots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.
הוכיחו כי $|u_1v_1+\ldots+u_nv_n| \le 1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\ldots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $(u_1+\ldots+u_n)^n \le n(u_1^2+\ldots+u_n^2)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \le \sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \ge \frac{1}{2}$.

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{2} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i}$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \ge \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i-b_i)^2}{a_i+b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i+b_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u=(1,2,2),\ v=(-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u=(3,4),\ v=(1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61^\circ$
12) $\theta=9.44^\circ$
13) $\cos\theta=0.173^\circ$
14) $\cos\theta=0.00036^\circ$
15) שאלת הוכחה.

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n} p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,

מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|=\|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכיחו כי : $\|u\| = \|v\| \Leftarrow (u-v) \perp (u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a = u-2v,\ b = 3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W=span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w=span\{(1,1,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W=span\{x\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W=span\{x,x^2\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$
ב- $M_{2\times2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $W_1\subseteq W_2\Rightarrow W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$.

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממימד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1+W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $B_W = \left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right)$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי) לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 6 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף ליניארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\dfrac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\dfrac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\dots+\dfrac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\dfrac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.
בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.
ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}, A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}, A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),\dots,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\dots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\ge\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{59^2}\right]$

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$
לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$
לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\text{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$,
במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,
במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1), w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\|}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\|}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1), w_2=(1,0,11), w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1, w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.
מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.
נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:
$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),..., f_{60}=\sin(60x)\}$.
ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.
מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

תשובות סופיות

1) $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2) $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3) $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4) $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6) $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8) $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9) $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי)
לתלמידי הנדסה ומדעים

פרק 7 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.

ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.

ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר),
היא מטריצה אורתוגונלית.

ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.

ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה
אורתוגונלית?

ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו או הפריכו:

א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n.

ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n, אשר עמודותיה, $\{v_1,...,v_n\}$,
מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל- R^n. נסמן $v_i v_i = \lambda_i$.
הוכיחו כי $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי,
יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\2&2&-\sqrt{8}\\-\sqrt{0.5}&\sqrt{0.5}&0\end{pmatrix}$.

6) הוכיחו את המשפט:

יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C, של המרחב R^n,
כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C.

ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$.
הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא
הווקטור v.

9) תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.
נגדיר $B = I + A$.
א. הוכיחו כי $B^2 = 2B$.
ב. ידוע ש- $|B| = 1024$.
מצאו את n.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.
ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- R^2.
ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$ ב- R^2.

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.
א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$
ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון, כאשר $0 \le \theta \le \pi$.
כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ לבין Rv היא θ.

13) נסמן: $\mathrm{Ref}_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי:
א. $\mathrm{Rot}_\theta \cdot \mathrm{Rot}_\phi = \mathrm{Rot}_{\theta+\phi}$
ב. $\mathrm{Ref}_{\theta/2} \cdot \mathrm{Ref}_{\phi/2} = \mathrm{Rot}_{\theta-\phi}$

14) תהי $A_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- A היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

15) יהי $v_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.
נגדיר מטריצה $H_{n\times n}$ על ידי: $H = I - 2v\cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).
הוכיחו:
א. H מטריצה סימטרית.
ב. H מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2 = I$.
ג. המטריצה H עבור $v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y = -x$.

תשובות סופיות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) א. שאלת הוכחה. ב. $n=10$

10) א. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$.

ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. המטריצה מתארת סיבוב של 90° במישור.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow$ $\forall u \in R^n \quad \|T(u)\| = \|u\|$.

2) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי T איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם T^{-1} אורתוגונלית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n \to R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n \to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ± 1.
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ± 1.

5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,...,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכיחו ש- $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,...,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),...,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2 \to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב-θ מעלות נגד כיוון השעון. מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

דמיון ולכסון אורתוגונלי

שאלות

1) A,B,C מטריצות ריבועיות.
הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:
א. A דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).
ב. אם A דומה אורתוגונלית ל- B אז B דומה אורתוגונלית ל- A (סימטריות).
ג. אם A דומה אורתוגונלית ל- B ו- B דומה אורתוגונלית ל- C אז A דומה אורתוגונלית ל- C (טרנזיטיביות).

2) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.
ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

3) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

4) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

5) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
כלומר, מצא מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$

3) $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac12\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac12\\0&0&\frac{6}{\sqrt{48}}&\frac12\\\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac12\end{pmatrix}$

4) $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

5) $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$